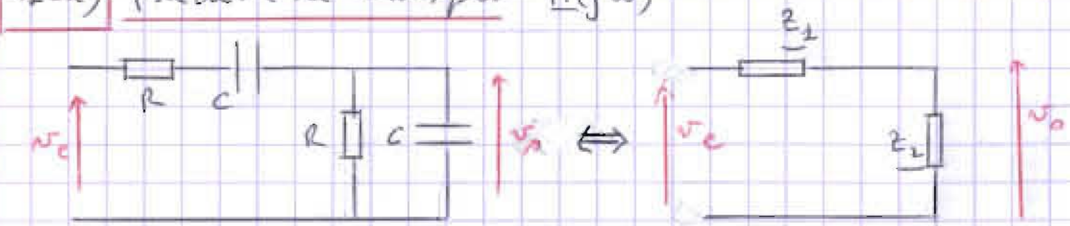
TP n° 1 : FILTRE DE WIEN

I - ETUDE THÉORIQUE DU CIRCUIT

1) Etude du comportement en régime sinusoïdal :

1-a) Fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$



Diviseur de tension, $v_s = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2} v_e$

avec $Z_1 = R + \dfrac{1}{jC\omega}$ et $\dfrac{1}{Z_2} = \dfrac{1}{R} + jC\omega$

Il vaut mieux travailler avec $\dfrac{1}{Z_2}$ qu'avec Z_2.

On divise en haut et en bas par Z_2.

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1} \qquad \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) + 1}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1 + 1} = \frac{1}{3 + jRC\omega +}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$$

On multiplie en haut et en bas par $jRC\omega$.

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega}}$$

1-b) Amplification en tension :

$$H(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}} \qquad \text{avec } RC = \frac{1}{\omega_0} \text{ et } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Maximum de $H(x)$: on divise par x en haut et en bas :

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 9}}$$

$\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 9$ minimal pour $\frac{1}{x} - x = 0$ c.à.d $x = 1$

$$\boxed{H_{max} = \frac{1}{3}}$$

1-c) Fréquence de coupure à $-3\,dB$:

$$H(x) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \qquad H(x) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 9}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 + 9 = 9 \times 2$$

$$\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 - 9 = 0 \qquad \left(\frac{1}{x} - x - 3\right)\left(\frac{1}{x} - x + 3\right) = 0$$

- ou bien $\frac{1}{x} - x - 3 = 0$ $1 - x^2 - 3x = 0$

$x^2 + 3x - 1 = 0$ $\Delta = 9 + 4$ $\Delta = 13$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ avec $x \geq 0$ $x = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}$

$x = 0{,}303$ $\boxed{x_1 = 0{,}303}$

- ou bien $\frac{1}{x} - x + 3 = 0$ $1 - x^2 + 3x = 0$

$x^2 - 3x - 1 = 0$ $\Delta = 9 + 4$ $\Delta = 13$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ avec $x \geq 0$ $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$

$x = 3{,}303$ $\boxed{x_2 = 3{,}303}$

$\boxed{1\text{-}d)}$ Avance de phase φ de v_s par rapport à v_e

$$\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 - x^2 + 3jx}$$

Comme la partie réelle du dénominateur change de signe, on multiplie par j en haut et en bas.

$$\underline{H}(jx) = \frac{-x}{j(1-x^2) - 3x} \qquad \underline{H}(jx) = \frac{x}{3x + j(x^2-1)} \qquad x \geq 0$$

$$\varphi = \varphi_{num} - \varphi_{dén} \qquad \varphi = 0 - \arctan \frac{x^2-1}{3x}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan \frac{1-x^2}{3x}}$$

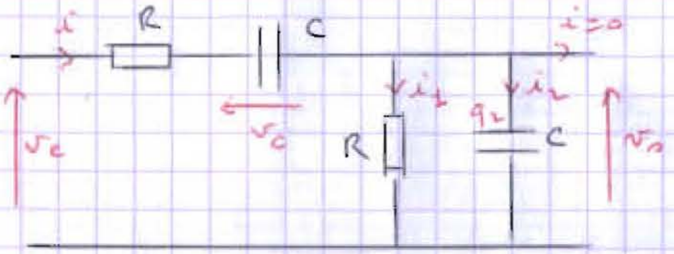
- Si $x = 1$ $\quad \varphi = 0$
- Si $x = x_1$ $\quad x_1^2 + 3x_1 - 1 = 0 \quad 1 - x_1^2 = 3x_1$

$$\frac{1-x_1^2}{3x_1} = 1 \qquad \varphi_1 = \arctan 1 \qquad \boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \text{ ou } 45°}$$

- Si $x = x_2$ $\quad x_2^2 - 3x_2 - 1 = 0 \quad 1 - x_2^2 = -3x_2$

$$\frac{1-x_2^2}{3x_2} = -1 \qquad \varphi_1 = \arctan(-1) \qquad \boxed{\varphi_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } -45°}$$

2) Étude du comportement en régime transitoire



On pose : $\tau = RC$ $\qquad \underline{H}(j\omega) = \dfrac{j\tau\omega}{1 + 3j\tau\omega + j^2\tau^2\omega^2}$

$$(1 + 3j\tau\omega + j^2\tau^2\omega^2)\,\underline{v_s} = j\tau\omega\,\underline{v_e}$$

$$v_s(t) + 3\tau \frac{dv_s(t)}{dt} + \tau^2 \frac{d^2 v_s(t)}{dt^2} = \tau \frac{dv_e(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 v_s(t)}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{\tau^2} v_s(t) = \frac{1}{\tau}\frac{dv_e(t)}{dt}$$

Pour $t > 0$: $\dfrac{dv_e(t)}{dt} = 0$

$$\boxed{\frac{d^2 v_s(t)}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{\tau^2} v_s(t) = 0}$$

- 2ème méthode : calcul direct en réels :

$v_e = Ri + \dfrac{q}{C} + v_s$ $\qquad$ avec $i = i_1 + i_2$

$i_1 = \dfrac{v_s}{R} \qquad q_2 = C v_s \qquad i_2 = \dfrac{dq_2}{dt} \qquad i_2 = C\dfrac{dv_s}{dt}$

et $i = \dfrac{dq}{dt}$ $\qquad$ On dérive

$$\frac{dv_e}{dt} = R\frac{d}{dt}\left(\frac{v_s}{R} + C\frac{dv_s}{dt}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{v_s}{R} + C\frac{dv_s}{dt}\right) + \frac{dv_s}{dt}$$

$$\frac{dv_e}{dt} = RC\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 3\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{RC}$$

Pour $t > 0$ $\quad v_e = E \quad \dfrac{dv_e}{dt} = 0$ $\qquad$ On divise par RC

avec $\tau = RC$

$$\boxed{\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{\tau^2} v_s = 0}$$

Résolution de l'équation différentielle :

On cherche des solutions en exponentielle : $x = A\exp(rt)$

$$A\exp(rt)\left[r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2}\right] = 0$$

$$\Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} \qquad \Delta = \frac{5}{\tau^2} \qquad r = \frac{-\frac{3}{\tau} \pm \frac{\sqrt5}{\tau}}{2}$$

$$v_s = A\exp\left(\frac{-3+\sqrt5}{2\tau}t\right) + B\exp\left(\frac{-3-\sqrt5}{2\tau}t\right)$$

$$v_s = \exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right)\left[A\exp\left(\frac{\sqrt5 t}{2\tau}\right) + B\exp\left(-\frac{\sqrt5 t}{2\tau}\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right)\left[A'\,ch\left(\frac{\sqrt5 t}{2\tau}\right) + B'\,sh\left(\frac{\sqrt5 t}{2\tau}\right)\right]$$

Conditions initiales : à $t=0$; continuité de v_s car v_s est la tension aux bornes du condensateur de droite

$$v_s(0^-) = v_s(0^+) \quad \text{avec } v_s(0^-) = 0 \Rightarrow A' = 0$$

La tension est continue aux bornes du condensateur de gauche : $v_c(0^-) = v_c(0^+)$ avec $v_c(0^-) = 0$

Loi des mailles à $t = 0^+$:

$$E = Ri + v_c + v_s \quad \text{avec } v_c(0^+) = 0 \text{ et } v_s(0^+) = 0$$

$$E = Ri(0^+) + 0 + 0 \qquad i(0^+) = E/R$$

Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$ avec $i_1 = \frac{v_s}{R}$

donc $i_1(0^+) = \frac{\overset{=0}{v_s(0^+)}}{R}$ $\quad i_1(0^+) = 0$ $\quad$ donc $i(0^+) = i_2(0^+)$

avec $i_2 = C\frac{dv_s}{dt}$ $\qquad \frac{E}{R} = C\frac{dv_s}{dt}(0^+)$ $\qquad \frac{dv_s}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$

Or : $v_s(t) = \exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right) B'\,sh\left(\frac{\sqrt5 t}{2\tau}\right)$

$$\frac{dv_s}{dt} = B'\left[-\frac{3}{2\tau}\exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right)sh\left(\frac{\sqrt5 t}{2\tau}\right) + \exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right)\cdot\frac{\sqrt5}{2\tau}\,ch\left(\frac{\sqrt5 t}{2\tau}\right)\right]$$

$$\frac{dv_s}{dt}(0^+) = B' \times \frac{\sqrt5}{2\tau} \qquad B' = \frac{2\tau}{\sqrt5}\frac{dv_s}{dt}(0^+) \qquad B' = \frac{2\tau}{\sqrt5}\times\frac{E}{\cancel{RC}}$$

$$\boxed{v_s(t) = \frac{2E}{\sqrt5}\exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right) sh\left(\frac{\sqrt5}{2}\frac{t}{\tau}\right)}$$

Maximum de $v_s(t)$:

$$\frac{dv_s(t)}{dt} = \frac{2E}{\sqrt5}\left[-\frac{3}{2\tau}\,sh\left(\frac{\sqrt5}{2}\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\sqrt5}{2\tau}\,ch\left(\frac{\sqrt5}{2}\frac{t}{\tau}\right)\right]\exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right)$$

Extremum : $\frac{sh\,u}{ch\,u} = \frac{\sqrt5}{3}$ avec $u = \frac{\sqrt5}{2}\frac{t}{\tau}$

$$\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{\sqrt5}{3} \qquad \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = \frac{\sqrt5}{3}$$

$$3(e^{2u} - 1) = \sqrt5(e^{2u} + 1) \qquad e^{2u} = \frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}$$

$$2u = \ln\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5} \qquad \boxed{t_1 = \frac{\tau}{\sqrt5}\ln\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}}$$

On vérifie que c'est un maximum.

$$v_{s_{max}} = \frac{2E}{\sqrt5}\exp\left[-\frac{3}{2\sqrt5}\ln\left(\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}\right)\right] sh\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt5}{3-\sqrt5}\right)\right]$$

$$\boxed{v_{s_{max}} = 0{,}275\,E}$$