

FILTRES: ETUDE THEORIQUE

1) Filtré passe-bas

a) Fonction de transfert d'ordre 1

• Th. de Millman en V^+ : $V^+ = \frac{\frac{V}{R} + 0}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{V}{1 + jRC\omega}$

avec $V^+ = V^- = V_s \Rightarrow V_s = \frac{V}{1 + jRC\omega}$

• Th. de Millman en V : $V = \frac{\frac{V_e}{R} + j\omega C V_s + \frac{V^+}{R}}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{R}}$

$V = \frac{V_e + V_s(1 + jRC\omega)}{2 + jRC\omega}$ et $V = (1 + jRC\omega) V_s$

$\Rightarrow V_e + V_s(1 + jRC\omega) = V_s(1 + jRC\omega)(2 + jRC\omega)$

$V_e = V_s(1 + jRC\omega)[(2 + jRC\omega) - 1] = V_s(1 + jRC\omega)^2$

$H(j\omega) = \frac{1}{(1 + jRC\omega)^2}$ ① On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

b) Amplification en tension d'ordre 1 $H(j\omega) = \frac{1}{(1 + jx)^2}$

$H = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{1}{1+x^2}$

c) Fréquence de coupure ω_c (-3dB)

$H_{max} = 1$ ($x \rightarrow 0$).

On cherche x tel que $H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow x^2 + 1 = \sqrt{2}$

0,5

$x_c = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$

$\Rightarrow \omega_c = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \omega_0$

$f_c = \frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2\pi} \frac{1}{RC} = 4656 \text{ Hz}$

Avance de phase φ de V_s par rapport à V_e

$H(j\omega_0) = \frac{1}{(1 + j)^2}$

$\varphi = 0 - 2 \text{ arctan } x$

$x_c = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \quad x_c = 0,643$

$\varphi_c = -1,14 \text{ rad} \quad \varphi_c = -65,5^\circ$

2) Filtré passe-haut

a) Fonction de transfert d'ordre 1

• Th. de Millman en V^+ : $V^+ = \frac{j\omega C V + 0}{j\omega C + \frac{1}{R}} = \frac{jRC\omega V}{1 + jRC\omega}$

• Th. de Millman en V : $V = \frac{j\omega C V_e + \frac{1}{R} V_s + j\omega C V_s}{j\omega C + \frac{1}{R} + j\omega C}$

$\Rightarrow V_s \frac{(1 + jRC\omega)}{jRC\omega} = V = \frac{jRC\omega V_e + (1 + jRC\omega) V_s}{1 + 2jRC\omega}$

$V_s(1 + jRC\omega)(1 + 2jRC\omega) = -R^2C^2\omega^2 V_e + jRC\omega(1 + jRC\omega) V_s$

$V_s(1 + jRC\omega)[1 + 2jRC\omega - jRC\omega] = -R^2C^2\omega^2 V_e$

$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-R^2C^2\omega^2}{(1 + jRC\omega)^2} = \frac{-x^2}{(1 + jx)^2}$ ①

b) Amplification en tension à vide

$$H = \frac{x^2}{1+x^2}$$

c) Fréquence de coupure -3dB

$$H_{max} \rightarrow 1 \quad \text{si } x \rightarrow \infty$$

$$\text{On cherche } x \text{ tel que } H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$(\sqrt{2}-1)x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \Rightarrow \omega_c = \frac{\omega_0}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \cdot \frac{1}{RC} = 5110 \text{ Hz} \quad x_c = 1,55$$

Avance de phase φ de V_s par rapport à V_e :

$$H(j\omega x) = \frac{-x^2}{(1+jx)^2} \quad \varphi = +\pi - 2 \arctan x \quad \text{mod } 2\pi$$

$$\text{pour } x_c = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \quad x_c = 1,55 \quad \varphi = 1,14 \text{ rad} \quad \varphi = 65,5^\circ$$

3) Filtré passe-bande à petite bande

a) Fonction de transfert à vide:

$$\bullet \text{ R de Millman en } V^-: V = \frac{jC_1 \omega V + \frac{1}{R_2} V_s}{jC_1 \omega + \frac{1}{R_2}} = 0$$

$$\Rightarrow V = - \frac{V_s}{jR_2 C_1 \omega}$$

$$\bullet \text{ R de Millman en } V: V = \frac{\frac{1}{R} V_e + jC_2 \omega V_s + 0 + 0}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + jC_1 \omega + jC_2 \omega}$$

$$V = \frac{R_1 V_e + jR_1 R_2 C_2 \omega V_s}{R_1 + R_2 + jR_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega} = - \frac{V_s}{jR_2 C_1 \omega}$$

$$jR_1 R_2 C_1 \omega V_e - R_1 R_2 C_2 \omega^2 V_s = -V_s (R_1 + R_2 + jR_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega)$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{jR_1 R_2 C_1 \omega}{R_1 R_2 C_2 \omega^2 - (R_1 + R_2) - jR_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-R_1 R_2 C_1 \omega}{R_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega + j(R_1 R_2 C_2 \omega^2 - (R_1 + R_2))}$$

$$\text{on le met sous la forme: } \frac{V_s}{V_e} = \frac{a}{1 + j\left[\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right]}$$

on divise le numérateur et le dénominateur par $R_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-R_2 C_1}{R(C_1 + C_2)} \cdot \frac{1}{1 + j\left[\frac{R_2 C_1 C_2 \omega}{C_1 + C_2} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} \frac{1}{\omega}\right]}$$

$$\omega_1 = \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1 C_2}$$

$$\omega_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$$

b) Amplification en tension à vide

$$H = \frac{R_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)^2}}$$

Amplification maximale:

$$H_{max} = |H| = \frac{R_2 C_1}{R(C_1 + C_2)} \quad \text{pour } \omega = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

La fréquence de résonance vaut,

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}} = 1023 \text{ Hz}$$

c) fréquences de coupure,

$$H = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{k_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)^2}} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = \pm 1$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} \pm \omega - \omega_2 = 0 \quad \Delta = 1 + 4 \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\omega_{c1} = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2/\omega_1} \quad \omega_{c2} = \frac{+1 + \sqrt{\Delta}}{2/\omega_1}$$

$$f_{c1} = \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_2}{\omega_1}}}{4\pi} \right] \omega_1 = 530 \text{ Hz}$$

$$f_{c2} = \left[\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_2}{\omega_1}}}{4\pi} \right] \omega_1 = 1980 \text{ Hz}$$

d) Avance de phase φ de V_s par rapport à V_e ,

$$H = \frac{a}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)} \quad \text{avec } a < 0$$

$$H = |a| e^{i\varphi} \quad \text{avec } \varphi = \pi - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)$$

- à la résonance: $\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \pi$

opposition de phase.

- pour les fréquences de coupure, $\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} = \pm 1$

$$\Rightarrow \varphi = \pi - \arctan(\pm 1) = \pi - \left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4}$$

Donc $\omega_{c1} = (-1 + \sqrt{2}) \frac{\omega_1}{2}$ (probation la plus petite)

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} &= \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} - \frac{2\omega_2}{\omega_1(-1 + \sqrt{2})} = \frac{(-1 + \sqrt{2})^2 \omega_1 - 4\omega_2}{2\omega_1(-1 + \sqrt{2})} \\ &= \frac{(1 - 2\sqrt{2} + 2)\omega_1 - 4\omega_2}{2\omega_1(-1 + \sqrt{2})} = \frac{(2 + 4\omega_2/\omega_1 - 2\sqrt{2})\omega_1 - 4\omega_2}{2\omega_1(-1 + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

$$= -1$$

$$\text{Donc } \omega_{c1}: \varphi_{c1} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{Donc } \omega_{c2}: \varphi_{c2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

ou -135°

$= 225^\circ$ ou $3,93 \text{ rad}$

$= 135^\circ$ ou $2,35 \text{ rad}$

4) AUTRE EXEMPLE DE FILTRE PASSIF-BAS:

4.a) Fonction de transfert à vide:

• R de Millman en V^- :

$$V = \frac{\frac{1}{R} V_e + \frac{1}{R} V^+ + jC\omega V_s}{\frac{2}{R} + jC\omega} = \frac{V_e + V^+ + jRC\omega V_s}{2 + jRC\omega} \quad (1)$$

$$\bullet V^+ = \frac{\frac{1}{R} V}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{V}{1 + jRC\omega} \quad (2)$$

$$\bullet V^- = \frac{\frac{1}{R_1} V_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 V_s}{R_2 + R_1} \quad (3) \quad \text{avec } V^- = V^+$$

$$(1) \Rightarrow V = \frac{V_e + \frac{R_2 V_s}{R_2 + R_1} + jRC\omega V_s}{2 + jRC\omega} = \frac{(1 + jRC\omega) \frac{R_2 V_s}{R_2 + R_1} + V_e}{2 + jRC\omega}$$

$$V_e + \left(\frac{R_2}{R_2 + R_1} + jRC\omega \right) V_s = (2 + jRC\omega) / (1 + jRC\omega) \frac{R_2}{R_2 + R_1} V_s$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2(1 - R_1^2 R_2^2 \omega^2) + jRC\omega(2R_2 - R_1)}$$

$$s: R_1 = R_2 = R$$

(2)

$$H(j\omega) = \frac{2R}{R(1 - R^2 C^2 \omega^2) + jRC\omega \times R} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad X = \frac{\omega}{\omega_0}$$

4-b) Amplification en tension a' vide

$$H = \frac{2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(1 - X^2)^2 + X^2}}$$

$$H = \frac{2}{\sqrt{1 - X^2 + X^4}}$$

Maximum de H)

$$\frac{dH}{dX} = 0 \Rightarrow -2X + 4X^3 = 0 \quad -1 + 2X^2 = 0$$

$$X^2 = \frac{1}{2} \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}RC} = 511,5 \text{ Hz} \quad (0,5)$$

$$H_{\max} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2,31 \Rightarrow \max_{dB} = 7,2 \text{ dB}$$

4-c) Fréquence de coupure a' -3dB)

$$\text{on cherche } X \text{ tel que } C = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{1 - X^2 + X^4}} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \Rightarrow X^4 - X^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$D = 1 + \frac{4}{2} = 3 \quad X^2 = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (0,5)$$

$$X_c = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} \Rightarrow f_c = \frac{X_c \omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} \times \frac{1}{2\pi RC} = 845 \text{ Hz}$$

4-d) Avance de phase φ de V_s par rapport a' V_e

$$H(j\omega_0 X) = \frac{2}{(1 - X^2) + jX} = \frac{-2j}{X - j(1 - X^2)}$$

$$\varphi = \varphi_{\text{num}} - \varphi_{\text{den}} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{X^2 - 1}{X}$$

$$X_c = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} \quad X_c = 1,169 \quad \varphi_c = -1,87 \text{ rad} \quad \varphi_c = -107,4^\circ$$

ou +4,41 rad ou 252,6°

Autre méthode:

$$H(j\omega X) = \frac{2}{(1 - X^2) + jX} \quad \varphi = \varphi_{\text{num}} - \varphi_{\text{den}}$$

$$\bullet \text{ si } 1 - X^2 > 0 \quad 1 > X^2 \quad 1 > X$$

$$\varphi = 0 - \arctan \frac{X}{1 - X^2}$$

$$\bullet \text{ si } 1 - X^2 < 0 \quad 1 < X^2 \quad 1 < X$$

$$\varphi_{\text{den}} = \pi - \varphi, \quad \varphi_{\text{den}} = \pi - \arctan \frac{X}{X^2 - 1}$$

$$\varphi = 0 - \pi + \arctan \frac{X}{X^2 - 1}$$

$$\varphi_c = -1,87 \text{ rad. ou } 4,41 \text{ rad}$$

-107° ou 253°

